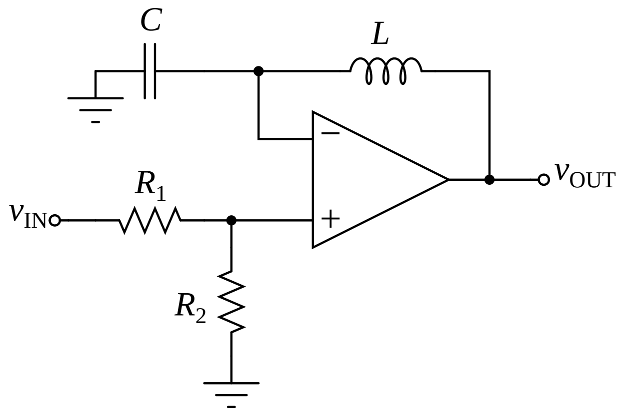
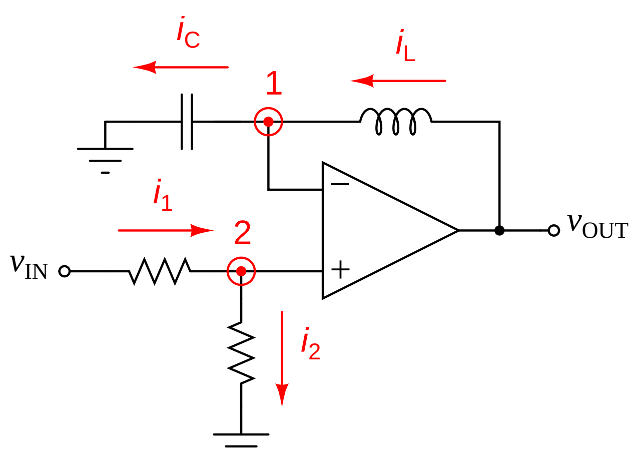
Tema d'esame del 30 Giugno 2003 - Esercizio 2

Il circuito illustrato nella figura è realizzato con un amplificatore operazionale ideale, due resistenze R_1= 1 kΩ e R_2= 2.5 kΩ, una capacità C = 12 μF, e un'induttanza L = 120 μH.



A. Si calcoli la tensione di uscita v_{OUT} in funzione della tensione di ingresso v_{IN}.



Applico la Kirchoff Current Law (KCL) al nodo 1:

[1] $i_1 = i_2$.

Ricordando che la differenza di potenziale in un bipolo è data dalla differenza tra la tensione applicata al polo positivo e quello negativo, posso calcolare v_1:

[2] v_1= v_{IN}- v^+;

analogamente calcolo v_2, ricordando che il termanale collegato alla terra da tensione pari a 0V:

[3] $v_2 = v^+ - 0$.

Grazie alla legge di Ohm posso scrivere:

[4] $i_1 = \dfrac{v_1}{R_1}$ e [5] $i_2 = \dfrac{v_2}{R_2}$.

Sostituendo [2] e [3] alle equazioni [4] e [5], che inserisco a loro volta nell'equazione [1] ottengo:

[6] $\dfrac{v_{in} - v^+}{R_1} = \dfrac{v^+ - 0}{R_2}$.

Posso risolvere rispetto a v^+:

[7] $\dfrac{v_{in}}{R_1} = \dfrac{v^+}{R_1} + \dfrac{v^+}{R_2}$

[8] $\dfrac{v_{in}}{R_1} = v^+ \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$.

Moltiplico entrambi i membri per $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ed ottengo:

[9] $\dfrac{v_{in}}{R_1} \cdot \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = v^+ \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$;

ossia:

[10] $v^+ = v_{in} \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$.

Essendo l'*amplificatore operazionale ideale* vale il *principio di terra virtuale*:

$v^+ - v^- = 0$;

$v^+ = v^-$.

sostituendo l'equazione [10] ad entrambi i membri:

[11] $v^+ = v^- = v_{IN} \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$.

Ora posso applicare la KCL al nodo 2:

[12] $i_C = i_L$.

La corrente nel condensatore ricordo che è pari a:

[13] $i_C = C \dfrac{dv_C(t)}{dt}$;

e la tensione nell'induttanza è pari a:

[14] $v_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt}$;

da cui ricavo la corrente:

[15] $i_L(t) = \dfrac{1}{L} \int_0^t v_L dt$.

Sostituendo [13] e [15] in [12] ottengo:

[16] $C \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{L} \int_0^t v_L dt$.

Ora calcolo le tensioni applicate al condensatore:

[17] $v_C = v^- - 0$;

ed all'induttanza:

[18] $v_L = v_{OUT}$- v^-;

che sostituisco nella [16] ottenendo:

[19] $C\frac{dv^-}{dt}=\frac{1}{L}\int_0^t(v_{OUT}-v^-)dt$.

Poichè voglio trovare la tensione di uscita v_{OUT}, derivo entrambi i membri ottenendo:

[20] $C\frac{d\ddot{v}^-}{dt^2}=\frac{1}{L}(v_{OUT}-v^-)$;

ora moltiplico entrambi i membri per L:

[21] $LC\frac{d\ddot{v}^-}{dt^2}=v_{OUT}-v^-$;

risolvo rispetto a v_{OUT}:

[22] $v_{OUT}= LC\frac{d\ddot{v}^-}{dt^2}+ v^-$;

e sostituendo v^-con l'equazione [11] ottengo:

[23] $v_{OUT}= LC\frac{\ddot{d}}{dt^2}v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}+ v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}$;

che fattorizzando rispetto a $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ mi permette di ottenere v_{OUT}:

[24] $v_{OUT}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(LC\frac{d\ddot{v}_{IN}}{dt^2}+v_{IN}\right)$.

B. Si calcoli l'andamento nel tempo della tensione in uscita v_{OUT}quando la tensione di ingresso è $v_{IN}= V_0\sin 2\pi f_0 t$, con V_0= 1V e f_0= 50 kHz.

Dato $v_{IN}= V_0\sin 2\pi f_0 t$, si calcola dapprima $\frac{d\ddot{v}_{IN}}{dt^2}$:

[25] $\frac{dv_{IN}}{dt}= V_0 2\pi f_0\cos 2\pi f_0 t$;

[26] $\frac{d\ddot{v}_{IN}}{dt^2}= -V_0 4\pi^2 f_0^2\sin 2\pi f_0 t$.

Fatto ciò posso sostituire l'equazione di v_{IN} e l'equazione [26] nell'equazione [24], ottenendo così v_{OUT}:

[27] $v_{OUT}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(-LCV_0 4\pi^2 f_0^2\sin 2\pi f_0 t+V_0\sin 2\pi f_0 t\right)$;

[28] $v_{OUT}=V_0\sin 2\pi f_0 t\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1-LC4\pi^2 f_0^2\right)$.

C. Si calcoli il guadagno in tensione espresso in decibel, quando la tensione di ingresso v_{IN} è la stessa del punto precedente.

(Da risolvere)