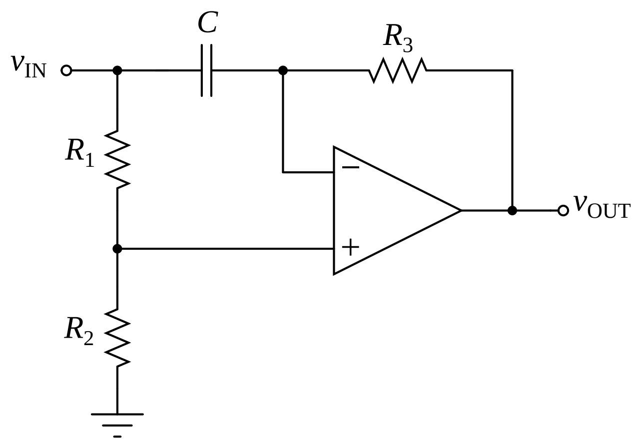
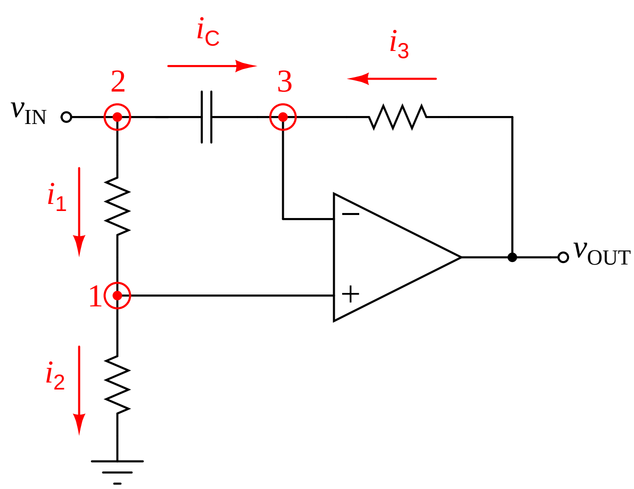
Tema d'esame dell'8 Settembre 2005 - Esercizio 2

Nel circuito illustrato, l'amplificatore operazionale è ideale, e i componenti passivi hanno valori: R_1= 2 kΩ, R_2= 2 kΩ, R_3= 3 kΩ e C = 3 nF.



A. Calcolare la tensione di uscita $v_{OUT}(t)$ in funzione della tensione di ingresso $v_{IN}(t)$.



Essendo l'amplificatore operazionale ideale, vale il principio di terra virtuale:

[1] v^+- v^-= 0.

[2] v^+= v^-

Poichè la tensione applicata ad un bipolo è pari alla differenza tra la tensione applicata al nodo positivo e quello negativo, e siccome nel terminale di terra, la differenza di potenziale è pari a 0V, calcolo v_2:

[3] v_2= v^+- 0.

Calcolo inoltre la tensione v_1:

[4] v_1= $v_{IN}-v^+$.

Considerando la legge di Ohm calcolo la corrente nelle resistenze R_1ed R_2:

[5] i_2= $\frac{v^+}{R_2}$;

[6] i_1= $\frac{v_{IN}-v^+}{R_1}$.

Grazie alla Kirchoff Current Law (KCL) applicata al nodo 1 ricavo:

[7] i_1= i_2;

e sostituendo a quest'ultima equazione le equazioni [5] e [6] ottengo:

[8] $\frac{v_{IN}-v^+}{R_1}=\frac{v^+}{R_2}$;

che posso risolvere rispetto a v$^+$:

[9] $\frac{v_{IN}}{R_1}$= v$^+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$;

[10] v^+= $v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}$.

Ora grazie alla KCL applicata al nodo 3 posso scrivere:

[11] i_C+ i_3= 0;

Dove la corrente in un condensatore è pari a:

[12] i_C= $C\frac{dv_c}{dt}$.

La tensione in R_3è invece:

[13] v_3= v_{OUT}- v^+;

sostituendo a v^+l'equazione [8], ottengo:

[14] v_3= v_{OUT}- $v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}$.

La tensione nel condensatore è invece:

[15] v_C= v_{IN}- v^+;

ed anche in questo caso a v^+sostituisco l'equazione [10]:

[16] v_C= v_{IN}- $v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}$;

[17] v_C= $v_{IN}\left(1\text{-}\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$.

Combinando quest'ultima equzione con l'equazione [12], calcolo la i_C:

[18] i_C= $C\frac{R_2}{R_1+R_2}\ \frac{dv_{IN}}{dt}$.

Con l'equazione [14] calcolo i_3:

[19] i_3= $\frac{v_{OUT}-v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3}$.

Ora posso sostituire alla [11] le equazioni [18] e [19] con cui calcolo v_{OUT}:

[20] $C\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{dv_{IN}}{dt}+\frac{v_{OUT}-v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3}=0;$

[21] $C\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{dv_{IN}}{dt}=-\frac{v_{OUT}-v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3};$

[22] $C\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{dv_{IN}}{dt}=-\frac{v_{OUT}}{R_3}-\frac{v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3};$

[23] $\frac{v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3}-C\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{dv_{IN}}{dt}=\frac{v_{OUT}}{R_3};$

Fattorizzo entrambi i membri per R_3:

[24] $v_{OUT}=v_{IN}\frac{R_2}{R_1+R_2}-R_3C\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{dv_{IN}}{dt};$

[25] $v_{OUT}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(v_{IN}-R_3C\frac{dv_{IN}}{dt}\right).$

B. Calcolare l'andamento nel tempo della tensione di uscita $v_{OUT}(t)$ quando la tensione di ingresso è data dalla funzione $v_{IN}(t)=V_C\sin 2\pi ft$, con $V_C=$ 1V e $f=$ 100 kHz.

Calcolare v_{OUT} in funzione di v_{IN} significa sostituire $v_{IN}(t)=V_C\sin 2\pi ft$ nell'equazione [25] precedentemente calcolata, calcolando anche la derivata prima di v_{IN}.

[26] $\frac{dv_{IN}}{dt}=V_C 2\pi f\cos 2\pi ft.$

Ora sostituisco v$_{IN}$ e $\frac{dv_{IN}}{dt}$ nell'equazione [25] ed ottengo:

[27] $v_{OUT}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(V_C\sin 2\pi ft-R_3CV_C 2\pi f\cos 2\pi ft\right);$

[28] $v_{OUT}=\frac{R_2}{R_1+R_2}V_C\left(\sin 2\pi ft-R_3C2\pi f\cos 2\pi ft\right).$