Nome e cognome:
Matricola:

Matematica del discreto

M2 - Gruppi, anelli e campi

10 maggio 2014 - Laurea on line

1. Si consideri il gruppo di permutazioni S_8:

   (a) scrivere la permutazione $\pi = (17)(21357)(367)$ come prodotto di cicli disgiunti;

   (b) stabilire se π è pari e determinarne il periodo.

   Eseguendo il prodotto da destra a sinistra delle quattro permutazioni si ottiene

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
 & & 6 & & & 7 & 3 & \\
3 & 1 & & & 7 & 2 & 5 & \\
 & 7 & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & \\
\hline
3 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 8
\end{array}$$

   quindi $\pi = (1\ 3\ 6\ 2\ 7\ 5)$. *Dunque* π *si fattorizza come un unico ciclo di lunghezza 6, perciò il suo periodo è 6. Allora* π *si può scrivere come prodotto di 5 scambi (non disgiunti):* $\pi = (5\ 1)(5\ 3)(5\ 6)(5\ 2)(5\ 7)$, *e quindi è dispari.*

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & k \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile e calcolarne l'inversa nel caso $k = -3$.

La matrice A è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. Il determinante di A è uguale a quello della matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & k-6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

che è stata ottenuta da A togliendo alla seconda e terza riga il doppio della prima. Il determinante di A' può essere calcolato rapidamente tramite lo sviluppo di Laplace applicato alla prima colonna, ottenendo

$$\det(A) = \det(A') = 20 - 2(k-6) = -2k + 8.$$

Allora A è invertibile se e solo se $k - 4 \neq 0$, ovvero $k \neq 4$. Ne segue anche che per $k = -3$ la matrice è effettivamente invertibile. Passiamo ora a calcolarne l'inversa in questo caso applicando il metodo di Gauss-Jordan. Si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-2I]{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-2II/5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/5 & -6/5 & -2/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-5III/2]{-II/5} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -5/2 \end{array}\right) \xrightarrow[II-9III/5]{I-3III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -8 & -3 & 15/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -5/2 \end{array}\right) \xrightarrow{I-3II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -5/2 \end{array}\right)$$

L'inversa richiesta è dunque

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ -5 & -2 & \frac{9}{2} \\ 3 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Risolvere (se possibile) il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 20 \\ x - y + z = 4 \\ 2x - y - z = 14 \end{cases}$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Possiamo risolvere il sistema con il metodo di Gauss-Jordan, ricordandoci che le operazioni vanno eseguite nel campo dei coefficienti.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrows II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III-2I]{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrows III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{III-3II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Allora il sistema dato è equivalente a

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ y + 4z = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha che $z = [1]_7$. *Sostituendo nelle prime due si ha* $y = [2]_7$ *e* $x = [5]_7$.

4. Si considerino i polinomi $p(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ e $q(x) = 2x + 3$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$, trovare quoziente e resto della divisione di $p(x)$ per $q(x)$.

Procedendo con l'usuale metodo (avendo l'accortezza di considerare i coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$) si ha:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -x & +3 & 2x+3 \\ \cline{5-5}
x^3 & +8x^2 & & & 7x^2+3x+8 \\ \cline{1-4}
 & 6x^2 & -x & +3 & \\
 & 6x^2 & -4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & +3 & \\
 & & 3x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}
$$

il quoziente è $q(x) = 7x^2 + 3x + 8$, il resto è $r(x) = 5$.